შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 310

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}} + \dots + \frac{1}{2012\sqrt[3]{2011}} = \sum_{k=1}^{2011} \frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{2011} \frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{2011} \frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}} < \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{2011} \frac{\frac{1}{(k+1)k} + \frac{2}{(k+1)}}{3} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^3 k}} \leqslant \frac{\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1}}{3}.$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{2011} \frac{\frac{1}{k(k+1)} + \frac{2}{k+1}}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{2011} \frac{\frac{2}{k+1}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \sum_{k=3}^{2012} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2012} \right).$$

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

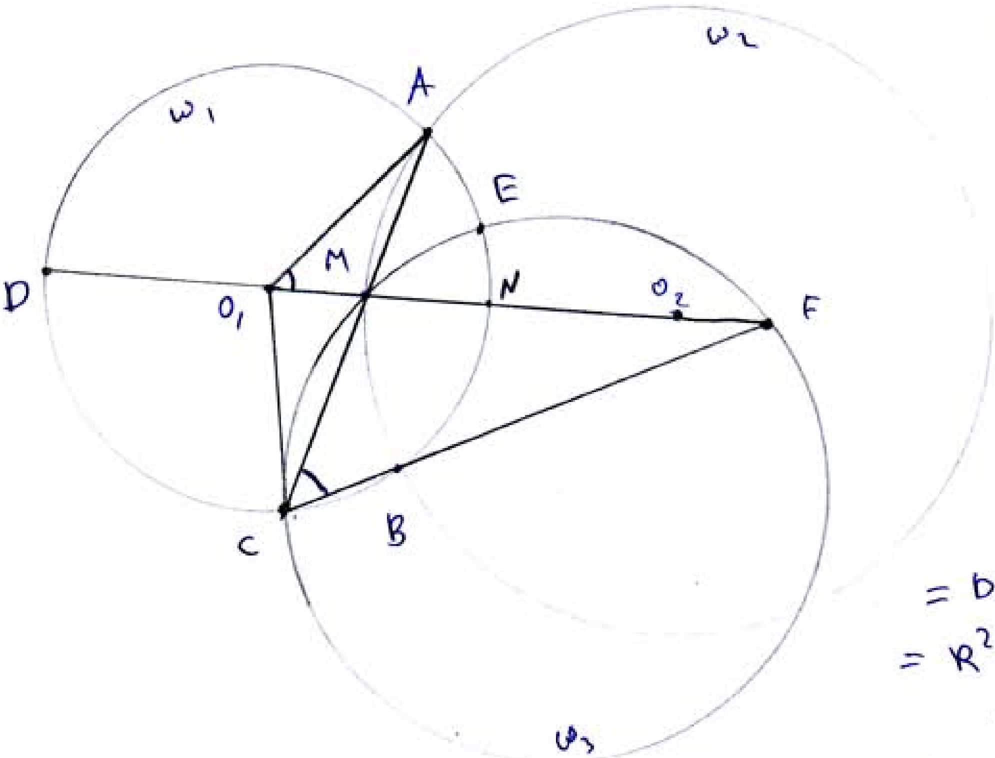
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 3/0

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



$\angle AO_1M = \frac{\angle AO_1B}{2} = \frac{\breve{AO_1B}}{2}$

$\frac{\breve{AO_1B}}{2} = \angle ACF$

$\Downarrow$

$\angle AO_1M = \angle ACF$

$\Downarrow$

CO_1AF ოთხკუთხედი ჩახაზვადია.

$\Downarrow$

$O_1M \cdot MF = AM \cdot MC =$

$= DM \cdot MN = (R + O_1M)(R - O_1M) =$

$= R^2 - O_1M^2$

$\Updownarrow$

$O_1M \cdot MF = R^2 - O_1M^2$

$O_1M(MF + O_1M) = R^2$

$O_1M \cdot O_1F = O_1E^2$

ანუ O_1E ω_3-ის მხები.

რ.ს.დ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 3/0

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$f: N_0 \to N_0$

$f(f(n)) = n + 2011$ (1)

$n \equiv f(n) \Rightarrow f(f(f(n))) = f(n) + 2011$

$f(n+2011) = f(n) + 2011$ (2)

$f(n) \geq 0 \Rightarrow f(2011) = f(0) + 2011 \geq 2011$

$f(4022) = f(2011) + 2011 \geq 4022$

და ა.შ.

$f(2013) = f(2) + 2011 \geq 2011$

$f(4024) = f(2013) + 2011 \geq 4022.$

ანუ ~~$f(2011k)$~~ $f(2011k+r) \geq 2011k$ (3) სადაც $r < 2011$, $r \in N_0$.

რადგან $f(f(n)) = n + 2011$, ანუ ეს n-ს ავსებს $[0, \infty)$ ინტერვალის ყველას, $f(f(n))$, და ამიტომ ~~$f(t)$~~, ანუ ფუნქცია იღებს $[2011, \infty)$-ში ყველა მნიშვნელობას.

[illegible] ან $[0, 2010]$-ში,

დავუშვათ, რომ $[0, 2010]$ ინტერვალის ყველა რიცხვი გადადის ან $[0, 2010]$-ში, ან $[2011, 4021]$-ში.

$f(r) = 2011k + t$

$r \leq 2011$, $r \in N_0$, $k \geq 2$, $k \in N$, $t \leq 2011$, $t \in N_0$.

თუ ეს ასეა, მაშინ ვიღებთ ~~$f(r) = 2011k$~~ $r \leq 2011$, $r \in N_0$ [illegible] $[2011, \infty)$-ში იღებს ყველა მნიშვნელობას, ~~(2)~~ რადგან ფუნქცია [illegible] მაშინ (2)-ს გამო $f(a + 2011\alpha)$ და $f(r + 2011\beta)$ მაშინ [illegible] $f(a) = 2011 + t$. [illegible] [illegible], რაც [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], ვიღებთ $[2011, 2011 \cdot 2^{k^{1000}} - 1]$ [illegible], რომ ეს [illegible] ყველა მნიშვნელობას ამ ინტერვალში და მაშინ ფუნქცია უნდა [illegible] $[0, 2011 \cdot 2^{k^{1000}} - 1]$ ინტერვალიდან (რადგან (3) [illegible] [illegible]). და [illegible] [illegible] 2011-ზე [illegible]. [illegible] ყველა მნიშვნელობას ვერ მიიღებს. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ანუ $[0, 2010]$ ინტერვალიდან f ფუნქცია რიცხვებს აისახავს $[0, 2010]$-ში, ან $[2011, 4021]$-ში.

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 3/0

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

შესაბამისად (2)-ს გამო ყველა $[2011k, 2011k+2010]$ ინტერვალი აისახება $[2011k, 2011k+2010]$-ში, ან $[2011(k+1), 2011(k+1)+2010]$-ში.

და $[2011k, 2011k+2010]$ ინტერვალის ყველა რიცხვი იმავე ინტერვალში, მაშინ $f(f(2011k+r)) = 2011k+r+2011 = f(2011k+r_1)$, რაც ხდება აისახება, რს ურთიერთ ცალსახად შემდეგ ინტერვალში, ხოლო, თუ ყველა ცალსახად შემდეგ ინტერვალში $f(f(2011k+r)) = 2011k+r+2011 = f(2011(k+1)+r_1)$, მაშინ ხდება ცალსახად, რს ურთიერთ რიცხვი იმავე ინტერვალში. ასევე (2)-ს თანახმად ყველა $[2011k, 2011k+2010]$ ამ ყველა ინტერვალის ზუსტად ერთნაირი რაოდენობის რიცხვი აისახება ინტერვალში და ზუსტად ერთნაირი რაოდენობის ცალსახად.

თუ ერთ-ერთი ინტერვალის ცალსახად α რაოდენობა, ტოლი $\alpha < 1006$ მაშინ შემდეგ ინტერვალში რიცხვი $2011-\alpha$, რაც მეტია ან ტოლი 1006-ზე. და ... ინტერვალში საერთო რიცხვი, იმდენი ცალსახად და რიცხვი ნებისმიერ შეიძლება. 1006 ან მეტი, ცალსახად მეტია, ინტერვალი და ეს 2011-~~...~~ მიგვიყვანს წინააღმდეგობამდე. ესე ვუჩვენეთ ამ ამოცანის. რ.დ.გ.